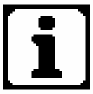
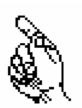
Folgen und Grenzwerte

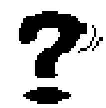
1 Arbeitsanleitung



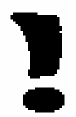
Information / Überblick
Hier bekommen Sie eine erste Information über das Thema des Kapitels zusammen mit den wichtigsten Lernzielen.



Hinweis
Dieses Symbol hebt Definitionen und wichtige Ergebnisse hervor.



Aufgabe



Lösung
Hier können Sie die erworbenen Fähigkeiten selbständig überprüfen.

2 Folgen

2.1 Einführung

In diesem Kapitel lernen Sie eine andere Art von Funktionen kennen: Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Funktionen sind diese nur auf natürlichen Zahlen definiert. Diese Funktionen stellen eine wichtige Grundlage der modernen Analysis dar und sind in ihrer praktischen Bedeutung mehr als nur eine „schöne Spielerei“.

Die Lernziele:

1. Sie lernen den Begriff der Folge als Funktion mit einer natürlichzahligen Variablen kennen.
2. Sie machen die Bekanntschaft einer bekannten Folge und untersuchen ihre praktische Anwendung.
3. Sie entdecken den Begriff der rekursiven Folge, bei der man ein Folgenglied aus dem jeweiligen „Vorgänger“ errechnet.

Aufgabe 1

In „Intelligenztests“ für Bewerbungen und Ähnliches tauchen häufig Aufgaben auf, bei denen einige Zahlen gegeben sind und man daraus die nachfolgenden herausfinden muss:

Finden Sie jeweils den Nachfolger der letzten Zahl!

a. 1; -1; 1; -1; 1; -1; 1; -1....
b. 1; 3; 5; 7; 9; ...
c. 1; 4; 9; 16; 25; ...
d. ½; 2/3; ¾; 4/5; 5/6; ...
e. ½; ¾; 7/8; 15/16; ...

(Die Lösungen finden Sie wie immer am Ende des Kapitels)

Diese Zahlenkolonnen kann man nun auch als eine Funktion auf natürlichen Zahlen begreifen, indem man die Stelle, an der eine Zahl genannt ist, als Argument der Funktion interpretiert:

Beispiel:

Gegeben seien die Zahlen 1, 4, 9, 16, 25, ...

Über die Platzziffer kann man nun eine Funktion definieren:

$1 \to 1$

$2 \to 4$

$3 \to 9$

$4 \to 16$

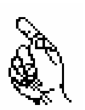
...

$n \to n^2$

Allgemein erhält man auf diese Weise eine Funktion

$a: n \rightarrow n^2$

die auf den natürlichen Zahlen definiert ist. Eine solche Funktion nennt man eine Folge. Zusammengefasst:



Definition:

Eine Funktion $a: n \rightarrow a(n)$ mit der Definitionsmenge IN* heißt ***Folge***.
Kurz schreibt man für diese Folge auch oft $(a_n)_{n \in IN}$ oder (a_n).

Schreibweise:

Statt a (n) schreibt man auch kurz a_n.
$a(1) = a_1$ (1. Folgeglied)
$a(2) = a_2$ (2. Folgeglied)
... ...
$a(n) = a_n$ (n-tes Folgeglied)

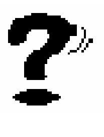
Nach Möglichkeit bemüht man sich, das allgemeine Bildungsgesetz zu erkennen. So kann man unter Umständen eine allgemeine Formel (**explizite Darstellung**) für das allgemeine n-te Formelglied a_n angeben und mit Hilfe dieser Formel beliebige Folgenglieder errechnen.

Beispiel:

Gegeben seien die ersten vier Glieder einer Folge: ½; 4/3; 9/4; 16/5. Man erkennt, dass im Zähler des n-ten Folgengliedes die Zahl n² steht; im Nenner findet man immer n+1. Das allgemeine Glied lautet somit

$a_n = n^2/n+1$.

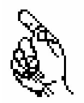
Jetzt kann man ein beliebiges Folgenglied sehr leicht berechnen, z.B. a_{100}:
$a_{100} = 100^2/(100+1) = 10000/101$



Aufgabe 2

a. Geben Sie zu den Folgen aus Aufgabe 1 b. und e. das allgemeine Folgenglied a_n an! Berechnen Sie dann jeweils a_{10}.
b. Berechne das zehnte Glied der Folge $(a_n)_{n \in IN}$ mit
$a_n = \sin(n \pi/4)$.
c. Berechne das vierte Glied der Folge $(a_n)_{n \in IN}$ mit
$a_n = (1+(1/n))^n$.

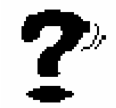
2.2 Rekursiv definierte Folgen



In vielen Anwendungen ist es üblich, Folgen nicht durch das allgemeine Glied a_n, sondern durch eine so genannte **rekursive Darstellung** festzulegen. Das bedeutet, dass man nur das erste Glied und darüber hinaus eine Rechenvorschrift angibt, aus der man das zweite und jeweils alle nachfolgende Glied ermitteln kann.

Beispiel:
Gegeben sind das Anfangsglied und die rekursive Vorschrift:
$a_1 = -18;\ a_{n+1} = a_n + 5$
Nacheinander kann man daraus alle anderen Folgenglieder ermitteln:
$a_1 = -18$
$a_2 = a_1 + 5 = -18 + 5 = -13$
$a_3 = a_2 + 5 = -13 + 5 = -8$
$a_4 = a_3 + 5 = -3$
....

Man erkennt, dass man auch hier wieder eine allgemeine Formel für das n-te Glied angeben kann:
$a_n = -18+5(n-1)$



Aufgabe 3

Ein bekanntes Beispiel für eine rekursiv definierte Folge ist die so genannte ***geometrische Folge***. Allgemein ist sie gegeben durch:
$a_1=a;\ a_{n+1}=a_n \cdot q$. Dabei sind a und q konstant.
Berechnen Sie damit zunächst die ersten vier Folgenglieder und ermitteln sie daraus eine direkte, nichtrekursive Formel für a_n!

Beispiel:
Eine konkrete Anwendung der geometrischen Reihe stellt das Bevölkerungswachstum dar. Derzeit beträgt die Bevölkerung in Deutschland 83 Millionen. Der jährliche Zuwachs beträgt 2,3 %.

Fragestellung:
Nach wie vielen Jahren hat sich die Bevölkerung verdoppelt?

Lösung:
$a_1 = a = 83 \cdot 10^6$

Nach einem Jahr leben 2,3 % mehr Menschen in Deutschland, also ergeben sich die nachfolgenden Bevölkerungszahlen wie folgt:
nach einem Jahr: $a_2 = a \cdot (1+0{,}023) = 1{,}023 \cdot a$
nach zwei Jahren: $a_3 = a_2 \cdot 1{,}023 = 1{,}023^2 \cdot a$
nach n Jahren: $a_{n+1} = a_n \cdot 1{,}023 = 1{,}023^n \cdot a$

Vergleicht man diese Folge mit der in Aufgabe 3 definierten Folge, so erkennt man, dass es sich um einen Spezialfall der geometrischen Folge handelt mit

$a = 83 \cdot 10^6$
$q = 1{,}023$

Nun kann man daran gehen, zu berechnen, nach wie vielen Jahren sich die Bevölkerung verdoppelt hat (unter der Annahme, dass das Wachstum gleich bleibt). Dann gilt:

$a_{n+1} = 2a_1$
$\Rightarrow a_1 \cdot 1{,}023^n = 2a_1$

Nun kann man a_1 kürzen:

$1{,}023^n = 2$

Um n hier auszurechnen, benötigt man die aus der zehnten Jahrgangsstufe bekannte Logarithmusfunktion die man auf die beiden Seiten der Gleichung „loslässt“:

$\log_{10} 1{,}023^n = \log_{10} 2$

Ein Gesetz des Logarithmus besagt, dass man den Exponenten „nach vorne ziehen“ kann.

$\Rightarrow n \log_{10} 1{,}023 = \log_{10} 2$

Nun kann man einfach nach n auflösen und die rechte Seite mit dem Taschenrechner berechnen:

$$n = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1{,}023} = 30{,}5$$

Nach 30,5 Jahren verdoppelt sich somit die Bevölkerung.

Aufgabe 4

Nun versuchen Sie es einmal selbst: Beim radioaktiven Zerfall von ^{238}Uran entsteht unter anderem das Isotop ^{234}Thorium, das selbst wieder weiter zerfällt. Betrachten wir nun eine gewisse Menge des Thoriumisotops. Man kann nachmessen, dass nach einem Tag nur noch 97,2% der ursprünglichen Menge an Thorium vorhanden ist. Berechnen Sie daraus, wie lange es dauert, bis nur noch die Hälfte der ursprünglichen Menge vorhanden ist!

2.3 Lösungen zu den Aufgaben des Kapitels

Lösung zu Aufgabe 1

a. 1
b. 11
c. 36
d. 6/7
e. 31/32

Lösung zu Aufgabe 2

a. zu 1b: $a_n=2n-1$ $a_{10}=2\cdot 10-1=19$
zu 1e: $a_n= (2^n-1)/(2^n)$; $a_{10}= (2^{10}-1)/(2^{10})=1023/1024$

b. $a_{10} = \sin (10\ \pi/4)= \sin (5/2\ \pi)=1$ (beachte: Bogenmaß!).

c. $a_4 = (1+(1/4))^4=(5/4)^4=(625/256)$.

Lösung zu Aufgabe 3

$a_1=a$; $a_{n+1}=a_n\cdot q$.
$a_1=a$;
$a_2=a_1\cdot q=aq$;
$a_3=a_2\cdot q=aq^2$;
$a_4=a_3\cdot q=aq^3$

Aus diesen ersten Gliedern und der obigen Formel erkennt man
$a_n=aq^{n-1}$.

Lösung zu Aufgabe 4

Berechnen Sie daraus, nach welcher Zeit nur noch die Hälfte der Menge existiert!

Am Anfang sind 100 % des Thoriums vorhanden:
$a_1 = a = 1$ (gesamte Menge an Thorium)

Nach einem Tag sind nur noch 97,2 % übrig:
$q = 0{,}972$

nach einem Tag: $a_2= a\cdot 0{,}972$
nach zwei Tagen: $a_3= a_2\cdot 0{,}972 = a\cdot 0{,}972^2$
...
nach n Tagen: $a_{n+1}= a_n\cdot 0{,}972= a\cdot\ 1{,}023^n$

Nun kann man daran gehen, zu berechnen, nach wie vielen Tagen sich die Menge an Thorium halbiert hat. Dann gilt:

$a_{n+1}= \frac{1}{2}\ a_1$
$\Rightarrow a_1\cdot\ 0{,}972^n= \frac{1}{2}\ a_1$

Nun kann man a_1 kürzen (sowieso gleich 1):

$0{,}972^n = ½$

Durch Anwendung der Logarithmusfunktion ergibt sich:

$\log_{10} 0{,}972^n = \log_{10} ½$

Man zieht nun den Logarithmus wieder nach vorne:

$\Rightarrow n \log_{10} 0{,}972 = \log_{10} ½$

Nun kann man einfach nach n auflösen und die rechte Seite mit dem Taschenrechner berechnen:

$$n = \frac{\log_{10} 1/2}{\log_{10} 0{,}972} = 24{,}4$$

Nach 24,4 Tagen halbiert sich also die vorhandene Menge an ^{234}Thorium.

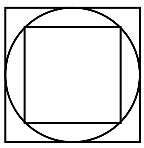
3 Grenzwerte von Folgen

Für diese Funktionen werden wir dann untersuchen, was passiert, wenn man sehr große, „unendlich große“, Werte einsetzt. Wir sehen uns also das Verhalten „am Rand“, an der „Grenze“ des Definitionsbereiches genauer an.

Es geht also darum, den Begriff des „Grenzwertes“ für Folgen präzise zu erfassen. Implizit wurde dieser Begriff bereits bei vielen anschaulichen Problemstellungen in früheren Jahrgangsstufen verwendet:

- Bei der Einführung der irrationalen Zahlen in der 9. Klasse wurden Folgen von Intervallen gesucht, deren Länge immer kleiner werden sollte und die dadurch eine Zahl wie $\sqrt{2}$ beliebig genau näherten. Die Länge wurde nämlich dabei für $n \to \infty$ (sprich: n gegen unendlich) beliebig klein, hatte also den „Grenzwert 0“. Dadurch zog sich die Schachtelung auf einen „innersten Punkt“ zusammen, den es grundsätzlich – definitionsgemäß – immer geben sollte (sog. Cantorsches Vollständigkeitsaxiom). Dadurch waren die reellen Zahlen geschaffen, die die Zahlengerade lückenlos füllten.

- In der 10. Klasse wurde bei der Suche nach dem Kreisumfang durch ein umgebendes und ein eingeschlossenes n-Eck angenähert. Für $n \to \infty$ wurde dann der Grenzwert des Rechtecksumfangs gefunden und als Umfang des Kreises identifiziert.



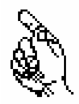
Näherung für n=4

Prinzipiell wurde also schon früher mit Grenzwerten gearbeitet, was jetzt kommt, ist also nichts Neues! Warum es dann überhaupt behandelt werden muss? Die Mathematik ist aufgebaut aus exakten Definitionen und daraus abgeleiteten Schlussfolgerungen. Wenn an der Basis, an den Definitionen „gepfuscht“ wird, stößt man häufig bei Schlussfolgerungen auf Probleme; außerdem würde eine nicht exakte Definition von verschiedenen Leuten verschieden aufgefasst werden. Man müsste dann erst darüber streiten, wie dieses oder jenes denn aufzufassen sei!

Die konkreten Lernziele:

1. Sie beherrschen den Begriff des Grenzwertes.
2. Sie untersuchen Folgen darauf, ob sie einen Grenzwert besitzen und berechnen ihn gegebenenfalls.

Hier also nun die exakte Festlegung des Begriffs „Grenzwert“. Wie sie zu interpretieren ist, wird danach noch ausführlich erläutert.



Definition:

Eine Zahl g heißt Grenzwert (oder: Limes) einer Folge (a_n), falls sich die Folgenglieder ab einem gewissen n an den Grenzwert beliebig genau annähern. Man schreibt dann:

$g = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$

(sprich: g ist der Grenzwert von a_n für n gegen unendlich; auch: a_n *konvergiert* gegen den Grenzwert g (lat.: convergere, zusammenstreben))

In dieser Definition steckt jetzt eine ganze Menge drin, was man beim ersten Lesen meist gar nicht so genau wahrnimmt:

„Eine Zahl g ...“:

Das bedeutet, dass es höchstens eine Zahl geben darf, der sich die Folge annähert. Betrachtet man zum Beispiel die Folge

(-1; 1; -1; 1; ...),

so gibt es zwei Zahlen, -1 und 1, die immer wieder auftauchen. Wäre die Zahl 1 der Grenzwert, so müsste sich die Folge der 1 annähern. Es taucht aber immer wieder die –1 als Folgenglied auf, die von der 1 deutlich verschieden ist. Deshalb hat diese Folge keinen Grenzwert. (Man spricht in diesem Fall davon, dass die –1 und die 1 Häufungspunkte der Folge sind.)

Aufgabe 5

Hat die Folge

(1; 0; 1; 1; 0; 1; 1; 1; 0; 1; 1; 1; 1; 0; ...)

einen Grenzwert?

„ab einem gewissen n“:

Es interessiert nur was „am Ende der Folge“ (das es natürlich nicht gibt, weil sie unendlich lang ist) passiert. Betrachten wir als Beispiel Folgen, die zunächst nur aus Einsen, dann nur aus Nullen bestehen:

(1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; .....)

(1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; .....)

(1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; ...)

Selbst wenn zunächst eine Milliarde Einsen kommen: All diese Folgen haben den Grenzwert 0, da wir immer ein n finden, ab dem die Folgenglieder alle identisch mit 0 sind! Hauptsache, man findet ein passendes n, egal, wie groß es ist. Man kann dafür auch sagen: „ Es existiert eine natürliche Zahl n...“

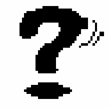
„ ... beliebig genau annähern“:

Ab einem gewissen n sollen die Folgenglieder also „ganz nah“ am Grenzwert liegen. Man kann sich so eine Grenzwertuntersuchung vorstellen wie ein Spiel mit zwei Spielern – nennen wir sie g und n – vorstellen. Sie sollen um die Folge $(a_n) =: (1-(1/10)^n)$ spielen:

Spieler g: Ich gebe Dir eine kleine Zahl (ich nenne sie ε), z.B. 1/10 vor. Du musst mir eine Zahl n nennen können, ab der sich die Folgenglieder um weniger als 1/10 vom vermuteten Grenzwert 1 unterscheiden!

Spieler n: Das ist leicht! Denn das gilt für n>1. Ich will es Dir zeigen: Ein Folgenglied $1-1/10^n$ unterscheidet sich vom Grenzwert 1 um weniger als 1/10, wenn $|1-(1/10)^n-1|<1/10$; d.h. $|-(1/10)^n|<1/10$; d.h. $(1/10)^n<1/10$; und das gilt, das weiß doch jeder, für n>1. Links steht nämlich für solche n dann 1/100, 1/1000, ...

Spieler g: Die nächste Zahl lautet 1/100000.



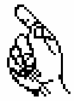
Aufgabe 6

Berechne: Welches n muss Spieler n nun nennen?

Kann Spieler n nun für beliebig kleine ε ein n nennen, hat er gewonnen. Dann existiert der Grenzwert. Dies ist allerdings ein fiktives Spiel. Der Spieler g müsste nämlich beliebig kleine Zahlen $\varepsilon>0$ nennen; es gibt aber dann immer eine noch kleinere Zahl, z.B. $\varepsilon/2$, $\varepsilon/10$. Für diese müsste es auch noch gelten. Die Spieler müssten unendlich lange spielen!

Übersetzt in die Sprache der Mathematik: Der Zusammenhang muss für beliebig kleine $\varepsilon > 0$ gelten. Da er dann auch für alle größeren ε gilt (wenn $| a_n – g | < 1/10$ gilt, dann gilt ja auch $| a_n – g | < 10$; $| a_n – g | < 30$), muss es für alle $\varepsilon > 0$ erfüllt sein.

Spieler n kann aber trotz allem einen Sieg davontragen, ohne sich dabei „graue Haare wachsen zu lassen“. Und das geht folgendermaßen: Ziel ist es ja immer noch, zu jedem noch so kleinen ε ein passendes n zu nennen. Kann er ***allgemein*** begründen, dass es für jedes ε ein n gibt, hat er gewonnen! Spieler g muss dann gar nicht nach konkreten Zahlen fragen!



Dazu verwendet man den Ansatz

$| a_n – g | < \varepsilon$

und formt so lange äquivalent um, bis die Gleichung die Form

n> ...

hat. Das bedeutet ja nichts anderes, als dass die erste Gleichung erfüllt ist, wenn n der unteren Bedingung genügt. Wenn also n über einer gewissen Grenze liegt, ist die Grenzwertbedingung erfüllt.

Beispiel:

$(a_n) = \left(\frac{3n}{2n-1}\right)$

Setzt man einige große Werte ein (versuchen Sie das ruhig einmal), so lässt sich vermuten:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$$

Überprüfen wir das:

$| a_n - g | < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{3n}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$$

Nun bringt man den Term im Betrag auf einen Hauptnenner:

$$\Leftrightarrow \left|\frac{3n \cdot 2 - 3 \cdot (2n-1)}{2(2n-1)}\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{6n - 6n + 3}{2(2n-1)}\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{3}{2(2n-1)}\right| < \varepsilon$$

Für beliebiges n $\in$ IN ist aber der Term im Betrag größer als 0; deshalb kann man die Betragsstriche weglassen:

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2(2n-1)} < \varepsilon$$

Man formt weiter um und erhält so n:

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2\varepsilon} < 2n - 1$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{3}{4\varepsilon} + \frac{1}{2}$$

Nun kann Spieler g ruhig kommen: verlangt er ein n für ε = 1/4000, so kann man einfach einsetzen und erhält n > 3000,5. Das 3001. und alle folgenden Glieder der Reihe unterscheiden sich also um weniger als 1/4000 von g = 3/2. Auf diese Weise findet man zu jedem ε ein n, so dass für alle größeren Zahlen die gewünschte Bedingung erfüllt ist.

Das Ergebnis lautet somit: Die Folge strebt gegen 3/2. 3/2 ist also der Grenzwert der Folge!

Aufgabe 7

Suchen Sie wie im obigen Beispiel den Grenzwert der Folge
$(a_n) = (3 + (2/(n+1)))$
und zeigen Sie, dass es sich auch wirklich um den gesuchten Grenzwert handelt!

Beispiel:

Betrachten wir noch eine Folge, die keinen Grenzwert besitzt, um zu zeigen, dass sich in diesem Fall kein sinnvolles Ergebnis ableitbar ist. Die zugrunde liegende Folge sei wieder

$(1; -1; 1; -1; 1; -1; 1; ...) = ((-1)^n)$.

Was könnte ein Grenzwert sein? Wählt man 0, so ergibt sich

$| (-1)^n – 0 | = 1 < \varepsilon$,

d.h. $\varepsilon > 1$. Wir suchen aber Lösungen für beliebig kleines ε. Die Gleichung ist aber nicht erfüllbar z.B. für $\varepsilon = 0,5$. Ähnliches würde für mutmaßliche Grenzwerte 1 und –1 passieren.

Dagegen hat die Folge (1; 1; 1; 1; ...) = (1) den Grenzwert 1, denn es gilt:

$| 1 – 1 | = 0 < \varepsilon$, und das ist für alle $\varepsilon > 0$ immer erfüllt (da ε eine beliebige positive Zahl sein soll), unabhängig von n!

Lösungen zu den Aufgaben des Kapitels

Lösung zu Aufgabe 5

Da selbst bei beliebig großem n immer wieder die 0 auftaucht und sich die Folge somit keiner einzelnen Zahl annähert, hat die Folge keinen Grenzwert.

Lösung zu Aufgabe 6

$(a_n) =: (1-(1/10)^n)$

$\lceil =1/100000$

$|1-(1/10)^n-1|<1/100000$

$\Rightarrow |-(1/10)^n|<1/100000$

$\Rightarrow (1/10)^n<1/100000$

$\Rightarrow n>6$

Lösung zu Aufgabe 7

$(a_n) = (3 + (2/(n+1)))$

Setzt man große n ein, so kann man vermuten, dass 3 der gesuchte Grenzwert ist. Überprüfen wir das:

$| a_n – g | < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left| 3 + \frac{2}{n+1} - 3 \right| < \varepsilon$$

Die 3 "hebt sich heraus":

$$\Leftrightarrow \left| \frac{2}{n+1} \right| < \varepsilon$$

Für beliebiges n ist aber der Term im Betrag größer als 0; deshalb kann man die Betragsstriche weglassen:

$$\Leftrightarrow \frac{2}{n+1} < \varepsilon$$

Man formt weiter um und erhält so n:

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < n + 1$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

Für beliebig kleines ε findet man also immer ein passendes N, ab dem die Eingangsbedingung erfüllt ist. z.B. für $\varepsilon = 0{,}01$: $n > 201$

Bemerkung:

Bereits in der Zeile

$$\frac{2}{n+1} < \varepsilon$$

ist man eigentlich fertig: man weiß, dass n+1 beliebig groß werden kann. Da der Term im Nenner steht, wird dann 2/(n+1) beliebig klein, kleiner als jede Schranke ε. (Man hat eine **Nullfolge** gefunden!)

3.1 Grenzwertsätze

Neben den bisher behandelten Methoden zur Grenzwertbestimmung gibt es noch weitere einfache Rechenregeln, mit denen sich Grenzwerte berechnen lassen. Diese Regeln sind eine wichtige Basis der Analysis, da sie besagen, dass Grenzwertbildung und die Grundrechenarten miteinander vertauschbar sind.

Auf einen Beweis dieser Grenzwertsätze wird verzichtet.

Grenzwertsätze:
Für zwei konvergente Folgen (a_n) und (b_n) mit den Grenzwerten a und b, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{und}$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = b$$

gilt:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$, wenn $b_n \neq 0$ und der GW $b \neq 0$

In manchen Fällen existiert zwar der Grenzwert der zusammengesetzten Folge, nicht aber die Grenzwerte der einzelnen Folgen.

Beispiel: $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^{(n+1)}$, die Folgen (a_n) und (b_n) konvergieren nicht. Die Folge $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen null.

Beispiele:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3 + 3n^2 + n}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(5 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$

   Auf elementarem Weg sieht man, daß die beiden letzten Terme gegen 0 konver - gieren. Da die Grenzwerte der einzelnen Summanden existeren, darf man den ersten Grenzwertsatz anwenden und erhält :

   $$\lim_{n\to\infty}\left(5 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 5 + \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 5 + 0 + 0 = 5$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2+3}{2n^2+3n+7}$

Man erkennt, daß Zähler und Nenner für $n \to \infty$ divergieren (sie werden beliebig groß. Deshalb darf man die Grenzwertsätze zunächst nicht anwenden.

Ein Trick, den man hier anwenden kann, ist, Zähler und Nenner durch die höchste auftretende Nennerpotenz zu teilen, also durch n^2. Da man die Folge nicht in der Nähe der 0 untersucht (dort käme das einer Division durch 0 gleich), ist dies gestattet.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+3}{2n^2+3n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{3}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}}$$

Nun erkennt man, daß Zähler und Nenner seperat konvergieren ($3/n^2$, $3/n$ und $7/n^2$ werden für $n \to \infty$ beliebig klein); man darf also den Grenzwertsatz anwenden:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{3}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 4+\frac{3}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2+\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 4+\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2+\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n^2}} = \frac{4+0}{2+0+0}$$

Aufgabe 8

Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen

(a_n) mit $a_n = \frac{2n^2-5n-14}{3n^3+2n^2+1}$

(b_n) mit $b_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}$

bei Annäherung an $+\infty$!

3.2 Lösungen der Aufgabe des Kapitels

Lösung zu Aufgabe 8

$$a: \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 5n - 14}{3n^3 + 2n^2 + 1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{-1} - 5n^{-2} - 14n^{-3}}{3 + 2n^{-1} + n^{-3}}$$

Da die Grenzwerte im Zähler und Nenner existieren, darf man weiter umformen:

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2n^{-1} - 5n^{-2} - 14n^{-3})}{\lim\limits_{n\to\infty}(3 + 2n^{-1} + n^{-3})} = \frac{0}{3} = 0$$

$$b: \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{n - \sqrt{n}}$$

Hier wird durch n geteilt, da 1 die höchste Potenz von n im Nenner ist.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{n - \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} =$$

Da die Grenzwerte im Zähler und Nenner existieren, darf man weiter umformen:

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})} = \frac{1}{1} = 1$$