Allgemeines zu Gleichungen

Eine Gleichung ist ein mathematischer Ausdruck: Beide Seiten links und rechts des Gleichheitszeichens haben denselben Wert:
1. Bsp.: $5\cdot(4 - 2) = 7 + 3$

In Gleichungen können auch Größen vorkommen, deren Wert zunächst nicht bekannt ist. Es gilt aber, ihren Wert **so** zu bestimmen, dass die Gleichung wieder "stimmt", d.h.: links und rechts ergibt sich derselbe Wert. Für diese unbekannte Größe(n) verwendet man Buchstaben, meist das x, aber auch jeder andere Buchstabe kann verwendet werden.
2. Bsp.: $5\cdot(x - 2) = 7 + 3$

Aus dem 1. Bsp. sieht man: Wenn man statt x die Zahl 4 schreibt, so ergibt die linke Seite der Gleichung den richtigen Wert 10. Man findet übrigens keine andere Zahl, die man für x einsetzen kann, um links insgesamt auf den Wert 10 zu kommen. Die "richtige" Lösung für x ist also die 4. Man schreibt die Lösungsmenge auf: $\mathbb{L}=\{4\}$ oder noch einfacher $x=4$.

Bei einfachen Gleichungen wie der aus dem Beispiel kann man die Lösung noch leicht durch Ausprobieren herausfinden. Bei komplizierteren Gleichungen, oder wenn die Lösung nicht ganzzahlig ist, wird das rasch schwieriger:
3. Bsp.: $4(y - 3) - 2y = 5(-3y + 1)$

Es gibt jedoch Verfahren, die Gleichung so umzuformen, dass man den Wert für die unbekannte Größe direkt ablesen kann. Die Voraussetzung für diese Umformungen ist, dass sie die "Gleichheit" der Gleichung, also ihren "Wahrheitsgehalt", nicht verändern.

Kehren wir zum ersten Beispiel zurück. Der erste Schritt besteht immer darin, die Ausdrücke rechts und links so weit zu vereinfachen, wie es geht. Dazu gehören das Auflösen von Klammern (Ausmultiplizieren und/oder Minusklammern) und das Zusammenfassen gleichartiger Summanden (Zahlen und Variablen):

$$\begin{aligned} 5\cdot(x - 2) &= 7 + 3 && |\ \text{Ausmultiplizieren bzw. Ausrechnen} \\ 5x - 10 &= 10 \end{aligned}$$

Dasselbe mit dem zweiten Beispiel:

$$\begin{aligned} 4(y - 5) - 2y + 8 &= 5(-3y + 1) && |\ \text{Ausmultiplizieren auf beiden Seiten} \\ 4y - 20 - 2y + 8 &= -15y + 5 && |\ \text{Zusammenfassen von Zahlen und Variablen} \\ 4y - 2y - 20 + 8 &= -15y + 5 && |\ \text{Ausrechnen} \\ 2y - 12 &= -15y + 5 \end{aligned}$$

So weit, so gut. Die nächsten Schritte bestehen darin, die Gleichung so umzuformen, dass auf einer Seite nur noch die Variable (x oder y) steht, auf der anderen nur noch eine Zahl. Dann kann man den Wert der Variablen direkt ablesen.

Hierzu können alle "störenden" Elemente (Summanden und Faktoren) beseitigt, d.h. besser gesagt auf die andere Seite der Gleichung gebracht werden, indem man **auf beiden Seiten der Gleichung** eine Operation anwendet, die den störenden Summanden oder den störenden Faktor verschwinden lässt.

Bei der Gleichung $5x - 10 = 10$ stört zunächst das "$- 10$" auf der linken Seite. Ein Minus von 10 kann durch ein Plus von 10 beseitigt werden. Vorsicht: Die Gleichung stimmt nur dann weiterhin, wenn man auf beiden Seiten dasselbe verändert:

$$
\begin{aligned}
5x - 10 &= 10 && \text{| Addieren von 10} \\
5x - 10 + 10 &= 10 + 10 && \text{| Ausrechnen} \\
5x &= 20
\end{aligned}
$$

Nun "stört" noch der Faktor 5 vor dem x, den man durch Teilen durch 5 beseitigen kann. Vorsicht: Immer beide Seiten der Gleichung gleich behandeln!

$$
\begin{aligned}
5x &= 20 && \text{| Teilen durch 5} \\
5x/5 &= 20/5 && \text{| Ausrechnen} \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

Vorsicht: Beim Teilen und Multiplizieren eines Terms (Rechenausdrucks) müssen **alle** Summanden durch die Zahl geteilt oder mit ihr multipliziert werden!

Der Zwischenschritt vor dem Ausrechnen kann natürlich entfallen, denn man weiß, dass 10+10 gleich 20 ist.

Die jeweilige Umformung wird rechts von der Gleichung durch den entsprechenden mathematischen Ausdruck vermerkt. Die korrekte Lösung der Gleichung sieht so aus:

$$
\begin{aligned}
5(x - 2) &= 7 + 3 && \text{| V} \quad \text{(Vereinfachen)} \\
5x - 10 &= 10 && \text{| + 10} \\
5x &= 20 && \text{| :5} \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

Beim zweiten Beispiel geht es so:

$$
\begin{aligned}
4(y - 5) - 2y + 8 &= 5(-3y + 1) && \text{| V} \\
4y - 20 - 2y + 8 &= -15y + 5 && \text{| V} \\
2y - 12 &= -15y + 5 && \text{| + 12} \\
2y &= -15y + 17 && \text{| + 15y} \\
17y &= 17 && \text{| : 17} \\
y &= 1
\end{aligned}
$$

Um das Resultat zu überprüfen, überprüft man, ob die Ausgangsgleichung aufgeht, wenn man für die Variable den herausgefundenen Wert einsetzt:
In der Gleichung $4(y - 5) - 2y + 8 = 5(-3y + 1)$ schreibt man für alle y die Zahl 1:
$4(1 - 5) - 2 \cdot 1 + 8 = 5(-3 \cdot 1 + 1)$, rechnet beide Seiten aus und erhält:

$$
\begin{aligned}
4 \cdot (-4) - 2 + 8 &= 5 \cdot (-2) \\
-16 + 6 &= -10 \\
-10 &= -10
\end{aligned}
$$

Dies ist eine wahre Aussage, damit stimmt die Lösung y=1.

Nicht alle Umformungen sind erlaubt, jedoch alle Additionen und Subtraktionen, sowie alle Multiplikationen und Divisionen mit/durch Zahlen ungleich 0.

Ein störendes negatives Vorzeichen vor der Variablen am Ende der Umformungen, z.B. bei -x = 5, kann man durch eine Multiplikation mit (-1) umkehren:

$$
\begin{aligned}
-x &= 5 && \text{| } \cdot(-1) \\
x &= -5
\end{aligned}
$$

Auflösen von Klammern

Das Verfahren zur Auflösung von Klammern hängt vom Rechenzeichen ab, das vor der Klammer steht.

1. Pluszeichen: + (…)

Klammern, vor denen direkt ein Plus-Zeichen steht, können einfach weggelassen werden:

$5x + (11 - 3x)$
$= 5x + 11 - 3x$

2. Minuszeichen: – (…)

Klammern, vor denen ein Minus steht, werden so behandelt:
Das Minuszeichen und die Klammern entfallen, dafür werden alle Vorzeichen in der Klammer umgedreht.
1. Bsp.: $4x - (5 + 3x - 7y) = 4x - 5 - 3x + 7y = x + 7y - 5$
2. Bsp.: $3x - 36 - (-x^2 + 23 - 71x) = 3x - 36 + x^2 - 23 + 71x = x^2 + 74x - 59$
3. Bsp.: $-(4x - 4) - (-3x - 5) = -4x + 4 + 3x + 5 = -x + 9$

3. Multiplikationszeichen: · (…) oder nur Faktor

Steht vor der Klammer ein Faktor, so wird beim Auflösen der Klammer jeder Summand in der Klammer mit diesem Faktor multipliziert. Vorzeichenregeln sind dabei:
$(+) \cdot (+) = (+)$
$(+) \cdot (-) = (-)$
$(-) \cdot (+) = (-)$
$(-) \cdot (-) = (+)$
1. Bsp.: $5\cdot(x - 2) = 5x - 10$ (Der Multiplikations-Punkt kann entfallen)
2. Bsp.: $-3(5x + 2y) = -15x - 6y$
3. Bsp.: $4x(-2 + 3x) = -8x + 12x^2$
4. Bsp.: $-17a(-2b + 3c - 1) = 34ab - 51ac + 17a$

4. Klammer mal Klammer: (…) · (…)

Beim Ausmultiplizieren zweier Klammern müssen alle Summanden der ersten Klammer mit allen Summanden der zweiten Klammer multipliziert werden. Vorzeichen beachten!
1. Bsp.: $(a + b)\cdot(c + d) = ac + ad + bc + bd$
2. Bsp.: $(2 - 3x)(5x + 7) = 10x + 14 - 15x^2 - 21x$
3. Bsp.: $(3a - 11b + 2)(5x - 7) = 15ax - 21a - 55bx + 77b + 10x - 14$

5. Minusklammer mal Faktor oder Minusklammer mal Klammer

Hierbei empfiehlt sich die Anwendung der Regel "Punkt- vor Strichrechnung", d.h. es wird zuerst multipliziert und dann erst subtrahiert. Dazu muss jedoch der gesamte Multiplikationsausdruck in Klammern gesetzt werden, denn der Gültigkeitsbereich des Minuszeichens muss ja erhalten bleiben:
1. Bsp.: $-(3 + x)\cdot 2 = -[(3 + x)\cdot 2)] = -[6 + 2x] = -6 - 2x$
2. Bsp.: $2x - (3x - 1)(2 + y) = 2x - [(3x - 1)(2 + y)] = 2x - (6x + 3xy - 2 - y)$
$= 2x - 6x - 3xy + 2 + y = -4x - 3xy + y + 2$

Übungsaufgaben:

Gleichungen lösen

1.) $x - (10x - 22) = -x + 3$	2.) $-(3x - 6) - x = -4 - 3x$
3.) $5 - 2x - (x + 3) = 4 - x$	4.) $2(1 + x) - (3x + 2) - x = 3$
5.) $29 - 3x - (14 + 3x) = 4 - 4x$	6.) $10 - 2x - 3(2 + 3x) = 4 - 9x$
7.) $4x + 19 - 4(-1 + 4x) = 3 - 8x$	8.) $-4 + 4(3x - 1) + 2x = 15x - 4$
9.) $3x + 15 - 2(2 + 3x) = -2x - 2$	10.) $3(3 + 2x) - 3(x + 3) - 4x = -7$
11.) $x^2 + 3x + 1 - (x - 1)^2 = -9 + 9x$	12.) $1 + 4x^2 - x = 26 - 3x + (2x + 1)^2$
13.) $-3x - 2 + (1 - x)^2 = -5x - 1 + x^2$	14.) $(10 + 2x)(1 + x) - 4x - 2x^2 = 3 + 9x$
15.) $-x - 9x^2 + 31 - (4 + 3x)(4 - 3x) = 4$	16.) $-3x + (10 + x)(1 - 2x) = 4 - 2x^2 - 20x$
17.) $x - 3(27 + x) + x^2 - (9 + x)(x - 9) = 3$	18.) $21 + 3(-3 + 3x^2 - 3x) - 5x = 9x^2 + 2 - 13x$
19.) $(2x - 1)(x - 34) - 4x + 1 = -3 + 2x^2 - 69x$	20.) $2(-2x + 1) - (1 - 2x)(-x + 2) + 2x^2 - 2x = -13$

Klammerterme auflösen

1.)	$(12 + 12x)(12x - 12)$	2.)	$-4(-2x - 4)$	3.)	$(-9 - 5x)^2$
4.)	$(9 - 10x)^2$	5.)	$-(71 - 18x)$	6.)	$(6 + 10x)^2$
7.)	$(9 + 10x)^2$	8.)	$(-19 - 29x)(-2x - 3)$	9.)	$-(140x - 8)$
10.)	$(12 + 11x)^2$	11.)	$3(3x + 2)$	12.)	$(11x + 8)^2$
13.)	$-2(-1 + 4x)$	14.)	$(10 + 12x)(10 - 12x)$	15.)	$(8 + 5x)(8 - 5x)$
16.)	$(7 + 11x)(7 - 11x)$	17.)	$(-8 + 9x)(-18 + 15x)$	18.)	$-(-136 + 95x)$
19.)	$3(-x + 4)$	20.)	$(-x + 2)(73 - 76x)$		

Lösungen

Lösungsmengen:

1.) L={2,375}	2.) L={10}	3.) L={−1}	4.) L={−1,5}
5.) L={5,5}	6.) L={0}	7.) L={5}	8.) L={−4}
9.) L={13}	10.) L={7}	11.) L={2,25}	12.) L={−13}
13.) L=R	14.) L={7}	15.) L={11}	16.) L={3}
17.) L={−1,5}	18.) L={10}	19.) L={9,5}	20.) L={13}

aufgelöste Klammerterme:

1.) $144x^2 - 144$	2.) $8x + 16$	3.) $25x^2 + 90x + 81$
4.) $100x^2 - 180x + 81$	5.) $18x - 71$	6.) $100x^2 + 120x + 36$
7.) $100x^2 + 180x + 81$	8.) $58x^2 + 125x + 57$	9.) $-140x + 8$
10.) $121x^2 + 264x + 144$	11.) $9x + 6$	12.) $121x^2 + 176x + 64$
13.) $-8x + 2$	14.) $-144x^2 + 100$	15.) $-25x^2 + 64$
16.) $-121x^2 + 49$	17.) $135x^2 - 282x + 144$	18.) $-95x + 136$
19.) $-3x + 12$	20.) $76x^2 - 225x + 146$	