Aufgaben zum Thema Beweisen

1. Beweise den folgenden Satz (Kongruenzbeweis):
   Ein Dreieck mit zwei gleichen Innenwinkeln ist gleichschenklig.

2. Gegeben ist folgender Satz:
   Ein Dreieck ist gleichschenklig, falls eine Höhe zugleich Seitenhalbierende ist.
   a) Bringe den Satz in die Wenn - Dann - Form.
   b) Beweise den Satz (Beweisfigur, Voraussetzung, Behauptung, Beweis)

3. Beweise folgenden Satz:
   Im gleichschenkligen Dreieck sind zwei Seitenhalbierende gleich lang.

4. Beweise:
   Wenn ein Viereck eine Raute ist, dann stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.

5. In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit den Basisecken A und B verlängert man die Winkelhalbierende von γ über die Spitze C hinaus um eine beliebige Strecke d. Der Endpunkt dieser Strecke sei D.
   Beweise mittels eines Kongruenzbeweises, dass das Dreieck ABD ebenfalls gleichschenklig ist.

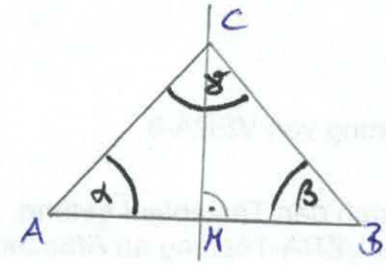
6. Gegeben ist der Satz:
   Wenn in einem Rechteck eine Diagonale eingezeichnet wird, dann entstehen zwei kongruente Dreiecke.
   Beweise den Satz

7. Beweise: „Wenn eine natürliche Zahl durch 18 teilbar ist, dann ist sie auch durch 6 und durch 3 teilbar!“

8. Beweise: Eine 2-ziffrige natürliche Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Lösungen – Beweise

① Skizze:



Vor.: ΔABC mit zwei gleichen Innenwinkel $\alpha = \beta$.

Beh.: Dreieck ist gleichschenklig

Bew.: Symmetrieachse $\perp$ zu $\overline{AB}$ durch C.

$\overline{AM} = \overline{MB}$ (Symmetrie)

$\alpha = \beta$ (Voraussetzung)

$\sphericalangle BMC = \sphericalangle AMC = 90°$ (Symmetrieachse)

$\Rightarrow \Delta AMC \cong \Delta BCM$ (Kongruenzsatz: wsw)

$\Rightarrow \overline{AC} = \overline{BC}$

$\Rightarrow \Delta ABC$ ist gleichschenklig ☒

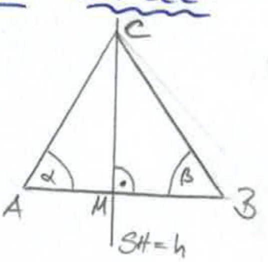
---

② a) Wenn eine Höhe zugleich Seitenhalbierende ist, dann ist das Dreieck gleichschenklig.

b) Vor.: Dreieck mit Höhe = SH.

Beh.: Höhe = SH, dann Dreieck gleichschenklig.

Bew.: Skizze:



$\overline{AM} = \overline{MB}$ (Seitenhalbierende)

$\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMC = 90°$ (Höhe)

$\overline{MC}$ gleiche Strecke im ΔAMC und ΔBCM

$\Rightarrow \Delta AMC \cong \Delta BCM$ (KS: SWS)

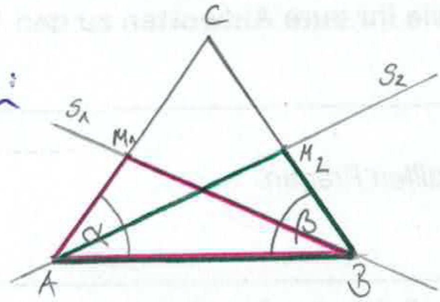
$\Rightarrow \overline{AC} = \overline{BC}$

$\Rightarrow \Delta ABC$ ist gleichschenklig ☒

(3) <u>Vor.:</u> Gleichschenkliges Dreieck

<u>Beh.:</u> 2 Seitenhalbierende (SH) sind gleich lang.

<u>Bew.:</u> Skizze:



$\overline{BM_2} = \overline{AM_1}$ (SH und gleichschenkl. Δ)

$\overline{AB}$ gleiche Strecke im ΔABM_2 und ΔABM_1

$\alpha = \beta$ (gleichschenkl. Δ)

$\Rightarrow \Delta ABM_2 \cong \Delta ABM_1$ (KS: SWS)

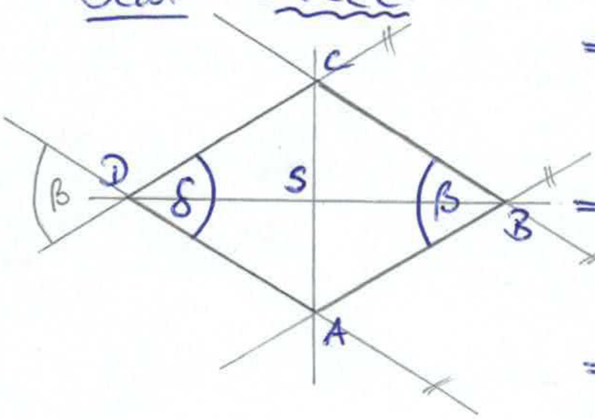
$\Rightarrow \overline{AM_2} = \overline{BM_1}$ ▨

(4) <u>Vor.:</u> Viereck ist Raute

<u>Beh.:</u> Diagonalen sind orthogonal.

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

<u>Bew.:</u> Skizze:



$\overline{AB} = \overline{BC}$ (Raute)

$\Rightarrow \Delta ABC$ ist gleichschenklig

$\overline{AD} = \overline{DC}$ (Raute)

$\Rightarrow \Delta ACD$ ist gleichschenklig

$\beta = \delta$ (Wechselwinkel)

$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ACD$ (SWS)

$\Rightarrow \overline{DS} = \overline{SB}$ (gleichschenkl. Δ)

sind Höhe u. SH

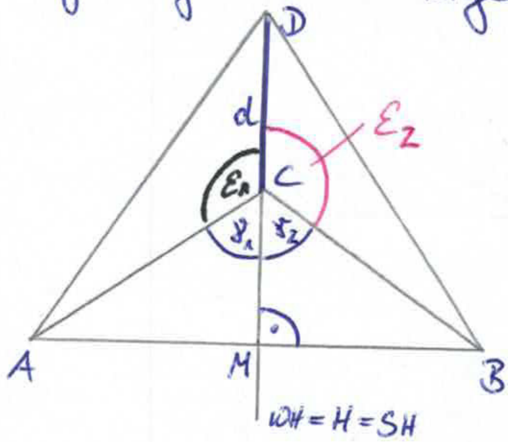
$\Rightarrow \overline{DB} \perp \overline{AC}$ (Höhe $\overline{BS}$ ⊥ auf Grundseite $\overline{AC}$!)

▨

(5) Vor.: ΔABC ist gleichschenklig.

Beh.: Winkelhalbierende (WH) um d verlängert bis D ergibt gleichschenkliges ΔABD.

Bew.:



$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (da WH und gestreckter Winkel)

$\overline{CB} = \overline{CA}$ (gleichschenkliges ΔABC)

$\overline{DC} = d$ gleiche Strecke im ΔACD und ΔBDC

$\Rightarrow \Delta ACD \cong \Delta BDC$ (SWS)

$\Rightarrow \overline{AD} = \overline{BD}$

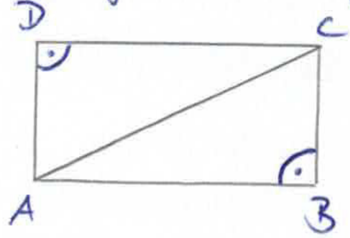
$\Rightarrow \Delta ABD$ ist gleichschenklig ▨

---

(6) Vor.: Bel. Rechteck

Beh.: Diagonale erzeugt 2 kongruente Dreiecke.

Bew.: Skizze:



$\overline{AB} = \overline{DC}$ und $\overline{AD} = \overline{BC}$ (Rechteck)

$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC = 90°$ (Rechteck)

$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ACD$ (KS: SWS)

▨

(7) Vor.: Zahl durch 18 teilbar. (natürliche Zahl)

$n = 18 \cdot k \quad ; \text{mit } k \in \mathbb{N}$

Beh.: Auch durch 6 und 3 teilbar.

$n = 6 \cdot b = 3 \cdot c$

Bew.: $n = 18 \cdot k = 6 \cdot 3 \cdot k$

$= 6 \cdot (3 \cdot k) = 6 \cdot b \quad ; \text{mit } b = 3 \cdot k$

$= 3 \cdot (6 \cdot k) = 3 \cdot c \quad ; \text{mit } c = 6 \cdot k$

---

(8) Vor.: Bel. natürliche Zahl mit zwei Ziffern und Quersumme der Zahl.

$n = 10 \cdot a + b \quad ; \quad n_Q = a + b$

1. Ziffer $\hat{=}$ a ; 2. Ziffer $\hat{=}$ b

Beh.: Quersumme durch 3 teilbar, dann auch Zahl durch 3 teilbar.

$n_Q = a + b = 3 \cdot k \quad ; \quad n = 3 \cdot z$

Bew.: $n_Q = a + b = 3 \cdot k$

$n = \underline{10 \cdot a} + b = \underline{9 \cdot a + a} + b$

$= 9 \cdot a + (a + b)$ — Quersumme

$= 9 \cdot a + 3 \cdot k$

$= 3 \cdot (3 \cdot a + k)$

$= 3 \cdot z \quad ; \text{mit } z = 3a + k$